

全品



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧升级版

主编 肖德好

导学案

高中数学

选择性必修第二册 SJ

本书为智慧教辅升级版

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。



天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS

目录 | 导学案

06 第6章 空间向量与立体几何

PART SIX

6.1 空间向量及其运算	163
6.1.1 空间向量的线性运算	163
6.1.2 空间向量的数量积	165
6.1.3 共面向量定理	168
6.2 空间向量的坐标表示	170
6.2.1 空间向量基本定理	170
6.2.2 空间向量的坐标表示	173
第1课时 空间直角坐标系及空间向量运算的坐标表示	173
第2课时 空间向量数量积的坐标运算及空间两点间的距离公式	176
6.3 空间向量的应用	178
6.3.1 直线的方向向量与平面的法向量	178
6.3.2 空间线面关系的判定	181
第1课时 空间向量与平行关系	181
第2课时 空间向量与垂直关系	183
6.3.3 空间角的计算	185
6.3.4 空间距离的计算	188
本章总结提升	190

07 第7章 计数原理

PART SEVEN

7.1 两个基本计数原理	194
第1课时 分类计数原理与分步计数原理	194
第2课时 分类计数原理与分步计数原理的综合应用	196
7.2 排列	198
第1课时 排列	198
第2课时 排列数公式	200
第3课时 排列的应用	202
7.3 组合	204
第1课时 组合与组合数公式	204
第2课时 组合数的性质及应用	206
微突破 常见的排列组合问题解题策略	209

7.4 二项式定理 210

7.4.1 二项式定理 210

7.4.2 二项式系数的性质及应用 212

本章总结提升 215

08 第8章 概率

PART EIGHT.....

8.1 条件概率 217

8.1.1 条件概率 217

第1课时 条件概率 217

第2课时 条件概率的性质及应用 219

8.1.2 全概率公式 220

8.1.3 贝叶斯公式 222

8.2 离散型随机变量及其分布列 224

8.2.1 随机变量及其分布列 224

第1课时 随机变量 224

第2课时 离散型随机变量的概率分布 226

8.2.2 离散型随机变量的数字特征 228

第1课时 离散型随机变量的均值 228

第2课时 离散型随机变量的方差与标准差 231

8.2.3 二项分布 233

第1课时 二项分布 233

第2课时 二项分布的综合问题 236

8.2.4 超几何分布 238

第1课时 超几何分布 238

第2课时 超几何分布的综合问题 240

8.3 正态分布 243

本章总结提升 246

09 第9章 统计

PART NINE.....

9.1 线性回归分析 251

9.1.1 变量的相关性 251

9.1.2 一元线性回归模型 255

9.2 独立性检验 259

本章总结提升 262

◆ 参考答案 267

第6章 空间向量与立体几何

6.1 空间向量及其运算

6.1.1 空间向量的线性运算

【学习目标】

1. 类比平面向量,能直接获得空间向量的概念,以及零向量、单位向量、相反向量、共线向量、相等向量的概念.
2. 在平面向量的基础上,能应用平行四边形法则和三角形法则进行空间向量的加减运算.
3. 类比平面向量,能进行空间向量的数乘运算.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间向量及有关概念

1. 在空间,我们把像位移、力、速度、加速度这样既有_____又有_____的量,叫作空间向量,空间向量的大小叫作空间向量的_____或_____.

符号表示:空间向量用字母 $a, b, c, \dots$ 表示,也用有向线段表示,有向线段的_____表示空间向量的模,向量 a 的起点是 A , 终点是 B , 则向量 a 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$, 其模记为_____或_____.

2. 几类特殊的空间向量

名称	定义及表示
零向量	规定长度为 0 的向量叫作_____,记为 $\mathbf{0}$
单位向量	_____的向量叫作单位向量
相反向量	与向量 a 长度_____,方向_____的向量,叫作 a 的相反向量,记为_____
相等向量	方向_____且长度_____的向量看作相等向量

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 零向量是没有方向的. ()
- (2) 两个有共同起点且相等的空间向量,其终点必相同. ()
- (3) 空间中,方向相反的两个向量是相反向量. ()
- (4) 空间中,所有单位向量都是相等的. ()

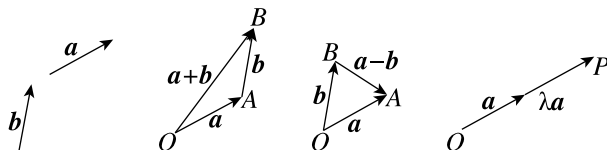
◆ 知识点二 空间向量的线性运算

1. 空间向量的加法、减法与数乘运算的意义如图.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = a + b;$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = a - b;$$

$$\overrightarrow{OP} = \lambda a (\lambda \in \mathbf{R}).$$



2. 空间向量的加法和数乘运算满足如下运算律:

$$(1) a + b = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) (a + b) + c = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \lambda(a + b) = \underline{\hspace{2cm}} (\lambda \in \mathbf{R}).$$

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

$$(1) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA}. \quad ()$$

(2) 有限个向量求和,交换相加向量的顺序,其和不变. ()

$$(3) \text{若 } \lambda \in \mathbf{R}, \text{ 则 } \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b. \quad ()$$

2. 空间向量的加、减法运算与平面向量的加、减法运算是否相同? 平面向量加、减法的运算律在空间向量中还适用吗?

◆ 知识点三 共线向量及共线向量定理

1. 定义:如果表示空间向量的有向线段所在的直线_____,那么这些向量叫作共线向量或平行向量.

向量 a 与 b 平行,记作_____.

规定:零向量与任意向量_____,即对于任意向量 a ,都有 0 _____ a .

2. 共线向量定理

对空间任意两个向量 $a, b (a \neq 0)$, b 与 a 共线的充要条件是存在实数 λ , 使_____.

课中探究

考点探究 素养小结

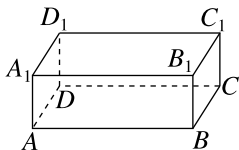
◆ 探究点一 空间向量的有关概念及应用

例 1 (多选题)给出下列四个说法,其中正确的是 ()

- A. 若两个空间向量相等,则它们的起点相同,终点也相同
- B. 若空间向量 a, b 满足 $|a| = |b|$, 则 $a = b$
- C. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,必有 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$
- D. 若空间向量 m, n, p 满足 $m = n, n = p$, 则 $m = p$

变式 (多选题)[2025·湖北襄阳五中高二期开学考] 如图所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3, AD=2, AA_1=1$, 则在以八个顶点中的两个分别为始点和终点的向量中 ()

- A. 单位向量有 8 个
- B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 3 个
- C. $\overrightarrow{AA_1}$ 的相反向量有 4 个
- D. 模为 $\sqrt{5}$ 的向量有 4 个



[素养小结]

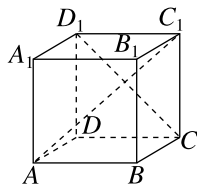
解答空间向量有关概念问题的关键点及注意点

- (1) 关键点:紧紧抓住向量的两个要素,即大小和方向.
- (2) 注意点:①零向量不是没有方向,它的方向是任意的.②单位向量的方向虽然不一定相同,但它们的长度都是 1.③两个向量的模相等,不一定是相等向量;反之,若两个向量相等,则它们不仅模相等,而且方向相同.若两个向量的模相等,方向相反,则它们为相反向量.

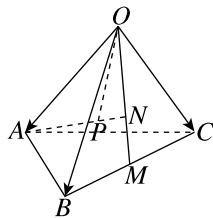
◆ 探究点二 空间向量的线性运算

例 2 (1)(多选题)如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,下列各式的运算结果为 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有 ()

- A. $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{CC_1}$
- B. $(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) + \overrightarrow{D_1C_1}$
- C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{D_1C}$
- D. $(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + \overrightarrow{B_1C_1}$

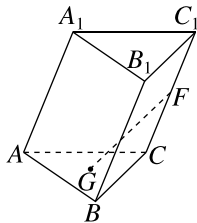


(2)[2025·江苏无锡高二期中] 如图, M 是四面体 $O-ABC$ 的棱 BC 的中点, 点 N 在线段 OM 上, 点 P 在线段 AN 上, 且 $MN = \frac{1}{2}ON$, $AP = \frac{3}{4}AN$, 用向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}$.



变式 (1)如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, F 是 CC_1 的中点, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\overrightarrow{GF} =$ ()

- A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$
- B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$
- C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$
- D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$



(2)若 A, B, C, D 为空间中不同的四个点,则下列各式中运算结果不一定为零向量的是 ()

- A. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}$
 B. $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD}$
 D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$

[素养小结]

利用三角形法则和平行四边形法则进行向量的加法运算时,务必注意和向量的方向,必要时可对空间向量自由平移进而获得更准确的结果.

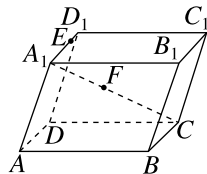
◆ 探究点三 空间向量的共线问题

例 3 (1)已知空间向量 a, b 不共线, $\overrightarrow{AB} = 2a - b$, $\overrightarrow{DC} = 3a - b$, $\overrightarrow{DB} = -a + b$, 则下列三点一定共线的是 ()

- A. A, B, C
 B. A, B, D
 C. A, C, D
 D. B, C, D

(2)若空间向量 e_1, e_2 不共线, 则使 $2ke_1 - e_2$ 与 $e_1 + 2(k+1)e_2$ 共线的 k 的值为_____.

变式 如图所示, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{A_1E} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1F} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$. 试运用向量方法证明: E, F, B 三点共线.



[素养小结]

(1)证明空间向量共线的方法:证明空间向量 a, b 共线的关键是利用已知条件找到实数 λ , 使 $a = \lambda b$ ($b \neq 0$) 成立, 在做题时要运用空间向量的运算法则, 结合空间图形, 化简得出 $a = \lambda b$ ($b \neq 0$), 从而得出 $a \parallel b$.

(2)证明空间三点共线的思路:对于空间三点 P, A, B , 可通过证明下列结论来证明 P, A, B 三点共线.

- ①存在实数 λ , 使 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$ 成立.
 ②对空间任一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ($x + y = 1$).

6.1.2 空间向量的数量积

【学习目标】

- 结合立体几何与空间向量的特征, 知道投影向量的概念.
- 类比平面向量, 能进行空间向量的数量积运算.
- 类比平面向量并借助空间图形, 知道空间向量的有关运算律, 能运用数量积解决空间中的垂直、夹角及距离问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间向量的夹角

1. 定义: a, b 是空间两个非零向量, 过空间任意一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\angle AOB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 叫作向量 a 与向量 b 的夹角, 记作 $\langle a, b \rangle$, 如下图.



2. 夹角的取值范围:

(1)规定:_____.

(2)如果_____, 那么向量 a 与 b 同向; 如果_____, 那么向量 a 与 b 反向; 如果_____, 那么称 a 与 b 互相垂直, 并记作 $a \perp b$.

【诊断分析】 判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角. ()

(2)若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为 α , 则直线 AB 与 CD 的夹角也为 α . ()

◆ 知识点二 空间向量的数量积

1. 定义: 设 a, b 是空间两个非零向量, 我们把数量 $a \cdot b$ 叫作向量 a, b 的数量积, 记作 $a \cdot b$, 即 $a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle$.

规定: 零向量与任一向量的数量积为 0.

2. 常用结论 (a, b 为非零向量)

(1) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

(2) $|a|^2 = a \cdot a$.

(3) $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$.

3. 数量积的运算律

(1) $a \cdot b = b \cdot a$;

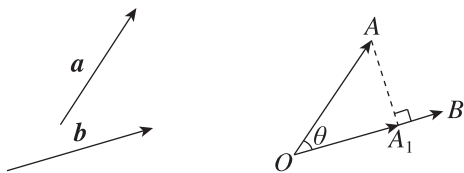
(2) $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) (\lambda \in \mathbb{R})$;

(3) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

◆ 知识点三 投影向量

1. 向量 a 在向量 b 上的投影向量

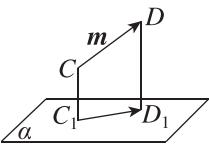
(1) 定义: 对于空间任意两个非零向量 a, b , 设向量 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$ (如图), 过点 A 作 $AA_1 \perp OB$, 垂足为 A_1 . 上述由向量 a 得到向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 的变换称为向量 a 向向量 b 投影, 向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 称为向量 a 在向量 b 上的投影向量.



(2) 意义: $a \cdot b = |\overrightarrow{OA_1}| \cdot |b|$, 即向量 a, b 的数量积就是向量 a 在向量 b 上的投影向量与向量 b 的数量积.

2. 向量 m 在平面 α 上的投影向量

(1) 定义: 如图, 设向量 $m = \overrightarrow{CD}$, 过 C, D 分别作平面 α 的垂线, 垂足分别为 C_1, D_1 , 得向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$, 我们将上述由向量 m 得到向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$ 的变换称为向量 m 向平面 α 投影, 向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$ 称为向量 m 在平面 α 上的投影向量.



(2) 意义: $m \cdot n = |\overrightarrow{C_1D_1}| \cdot |n|$, 即空间向量 m, n 的数量积就是向量 m 在平面 α 上的投影向量与向量 n 的数量积.

【诊断分析】判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

(1) 对于向量 a, b , 若 $a \cdot b = 0$, 则一定有 $a = 0$ 或 $b = 0$. ()

(2) 对于非零向量 b , 由 $a \cdot b = b \cdot c$, 可得 $a = c$. ()

(3) 若 $a \cdot b < 0$, 则 $\langle a, b \rangle$ 是钝角. ()

(4) 已知 e_1, e_2 是夹角为 120° 的两个单位向量, 则向量 e_1 在向量 e_2 上的投影向量为 $-\frac{1}{2}e_2$. ()

课中探究

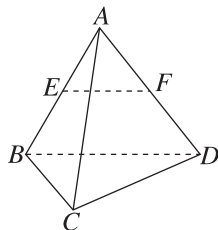
考点探究 素养小结

◆ 探究点一 空间向量的数量积运算

例 1 如图所示, 在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, AD 的中点, 求:

(1) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BA}$; (2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD}$;

(3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DC}$; (4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.



变式 (1) (多选题) [2025 · 河南洛阳高二期中] 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则

- ()
- A. $\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 1$
C. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 1$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 1$

(2) 正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 2, 点 D 是 $\triangle PAB$ 的重心, 则 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

[素养小结]

(1) 空间向量数量积运算的两种方法

① 已知 a, b 的模及 a 与 b 的夹角, 直接代入数量积公式计算.

② 如果要求的是关于 a 与 b 的多项式形式的数量积, 可以先利用数量积的运算律将多项式展开, 再利用 $a \cdot a = |a|^2$ 及数量积公式进行计算.

(2)在几何体中求空间向量数量积的步骤

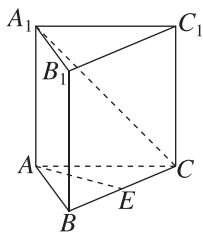
①首先将各向量分解成已知模和夹角的向量的组合形式.

②利用向量的运算律将数量积展开,转化为已知模和夹角的向量的数量积.

③代入 $a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle$ 求解.

◆ 探究点二 利用向量的数量积解决夹角问题

例 2 如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC = AB = AA_1 = \sqrt{2}$, $BC = 2AE = 2$, 求向量 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{A_1C}$ 的夹角.



变式 (1)已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2$, $BD = 3$, $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BD} \rangle =$ ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

(2)[2025·成都石室中学高二月考] 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成大小为 $\frac{\pi}{3}$ 的二面角, E , F 分别是 BC , AD 的中点, O 是原正方形 $ABCD$ 的中心, 则 $\angle EOF$ 的余弦值为_____.

[素养小结]

(1)求两个空间向量的夹角的两种方法

①结合图形, 平移向量, 利用空间向量的夹角定义来求, 但要注意向量夹角的范围.

②先求 $a \cdot b$, 再利用公式 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$ 求 $\cos \langle a, b \rangle$, 最后确定 $\langle a, b \rangle$.

(2)用向量法求两直线的夹角

①取向量: 在两直线上分别取方向向量 a, b .

②运算: 求 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$.

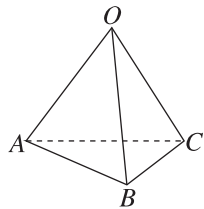
③结论: 设两直线的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle a, b \rangle|$, 进而得到 θ .

◆ 探究点三 利用投影向量解决空间向量的数量积

例 3 已知正四面体 $OABC$ 的棱长为 1, 如图所示.

(1)确定向量 $\overrightarrow{OA}$ 在向量 $\overrightarrow{OB}$ 上的投影向量, 并求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$;

(2)确定向量 $\overrightarrow{AO}$ 在平面 ABC 上的投影向量, 并求 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$.



变式 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $AB=1$, 且 $SA \perp$ 底面 $ABCD$, 则向量 $\overrightarrow{CS}$ 在平面 $ABCD$ 上的投影向量是 _____, $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____.

[素养小结]

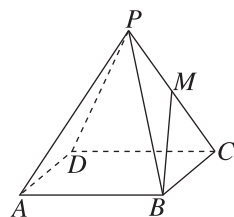
利用空间向量的数量积的几何意义求两个向量的数量积时, 准确探寻某一向量在平面(或向量)上的投影向量是解题的关键.

◆ 探究点四 利用空间向量的数量积求模

例 4 [2025 · 江苏南通高二期末] 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长均为 1, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$, 则线段 A_1C 的长为 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. 2
C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

变式 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 侧棱 PA 的长为 2, 且 PA 与 AB, AD 的夹角都是 60° , 若 M 是 PC 的中点, 则 $|\overrightarrow{BM}| =$ ()



- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[素养小结]

利用空间向量的数量积求模的基本方法

(1) 将所求向量用已知向量表示, 通过向量运算来求所求向量的模.

(2) 因为 $a^2 = |a|^2$, 所以 $|a| = \sqrt{a^2}$, 这是利用向量解决长度和距离问题的基本公式.

6.1.3 共面向量定理

【学习目标】

1. 结合立体几何与空间向量的特征, 了解共面向量的概念.
2. 理解空间向量共面的充要条件, 会证明空间四点共面.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量共面

一般地, 能平移到 _____ 的向量叫作共面向量.

◆ 知识点二 共面向量定理

如果两个向量 a, b 不共线, 那么向量 p 与向量 a, b 共面的充要条件是存在有序实数组 (x, y) , 使得 $p = xa + yb$.

注意: (1) 空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件: 存在有序实数组 (x, y) , 使 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ 或对空间任意一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

(2) 共面向量定理的用途:

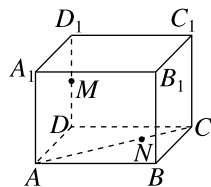
- ① 证明四点共面;
- ② 证明线面平行(进而证明面面平行).

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 四点共面的判断与证明

例 1 [2025 · 江苏启东汇龙中学月考] 如图所示, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 DD_1 的中点, $N \in AC$, 且 $AN : NC = 2 : 1$, 求证: A_1, B, N, M 四点共面.



变式 [2024·江苏徐州高二期末] 对空间中任意一点 O 和不共线的三点 A, B, C , 下列式子中能得 P 在平面 ABC 内的是 ()

- A. $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$
 B. $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
 C. $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$
 D. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OC}$

[素养小结]

(1) 已知 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 不共面, 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 且 $x + y + z = 1$, 则 P, A, B, C 四点共面.

(2) 证明 P, A, B, C 四点共面, 可以通过证明存在有序实数组 (x, y) , 使 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 不共线) 来证明.

◆ 探究点二 向量共面的判断与证明

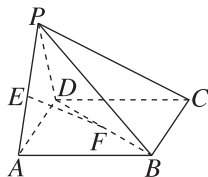
例 2 已知 A, B, C 三点不共线, 对平面 ABC 外的任一点 O , 点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

- (1) 判断 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 三个向量是否共面;
 (2) 判断点 M 是否在平面 ABC 内.

变式 (1) [2025·江苏启东一中高二期末] 若 a, b, c 不共面, 则 ()

- A. $b - c, b + c, a$ 不共面
 B. $b + c, b - 2c, 3c$ 不共面
 C. $b + c, 2a, a + b + c$ 不共面
 D. $b + c, b - c, 2b$ 不共面

(2) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, E, F 分别为 PA, BD 的中点. 求证: 向量 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP}$ 共面.



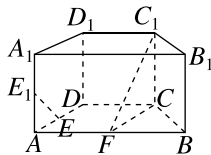
[素养小结]

(1) 共面向量不仅包括在同一个平面内的向量, 还包括平行于同一平面的向量.

(2) 空间任意两个向量是共面的, 但空间任意三个向量不一定共面.

◆ 探究点三 共面向量定理的应用

例 3 [2025·江苏南京高二期中] 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AB = 4, CD = 2$, E, E_1, F 分别是棱 AD, AA_1, AB 的中点. 证明: 直线 $EE_1 \parallel$ 平面 FCC_1 .



变式 [2025·江苏扬州新华中学高二月考] 已知向量 a, b, c 是空间中不共面的三个向量, $\overrightarrow{OA} = a - 2b + c$, $\overrightarrow{OB} = pa + b + qc$, $\overrightarrow{OC} = 2a + b - 2c$.

(1) 若 $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}$, $m \in \mathbf{R}$, 求 p, q 的值;

(2)若 O, A, B, C 四点共面,求 $3p+5q$ 的值.

〔素养小结〕

通过证明三个向量共面,可以证明线面平行,进而证明面面平行,比如例题里面通过证明 $\overrightarrow{EE_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{FC}$ 共面, EE_1 不在平面 FCC_1 内,得 $EE_1 \parallel \text{平面 } FCC_1$.

◆ 探究点四 利用共面向量定理求参数

例 4 [2025·江苏常州高二期中] 已知 A, B, C, D 四点共面, 且其中任意三点均不共线, 设 P 为空间中任意一点, 且 P 不在平面 $ABCD$ 内, 若 $\overrightarrow{BD} = 6\overrightarrow{PA} - 4\overrightarrow{PB} + \lambda\overrightarrow{PC}$, 则 $\lambda =$ ()

- A. 2 B. -2
C. 1 D. -1

变式 已知点 D 在 $\triangle ABC$ 确定的平面内, O 是平面 ABC 外任意一点, 实数 x, y 满足 $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
C. 1 D. 2

「素养小结」

已知 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 不共面, 若 P, A, B, C 四点共面, $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 则 $x + y + z = 1$, 利用这个结论构造关于参数的方程从而可求得参数.

6.2 空间向量的坐标表示

6.2.1 空间向量基本定理

【学习目标】

1. 在平面向量基本定理的基础上,能借助投影进行向量分解,知道空间向量基本定理.
2. 知道基底、单位正交基底,并能在选定基底下进行向量的表示及运算.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间向量基本定理及其推论

1. 空间向量基本定理

如果三个向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 不共面, 那么对空间任一
向量 $\mathbf{p}$, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $\mathbf{p} =$

2. 空间向量基本定理的推论

设 O, A, B, C 是不共面的四点, 则对空间任意一点 P , 都存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使得 $\overrightarrow{OP} =$ _____.

注意:由于零向量与任意一个非零向量共线,与任意两个不共线的非零向量共面,所以若三个向量不共面,就说明它们都不是零向量.

◆ 知识点二 基底的有关概念

1. 基底与基向量: 如果三个向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 不共面, 那么空间的每一个向量都可由向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 线性表示. 我们把 _____ 称为空间的一个基底, _____ 叫作基向量.

2. 正交基底与单位正交基底:如果空间一个基底的三个基向量_____,那么这个基底叫作正交基底.特别地,当一个正交基底的三个基向

量都是_____时,称这个基底为单位正交基底,通常用 $\{i, j, k\}$ 表示.

注意:(1)空间任意三个不共面的向量都可构成空间的一个基底,基底选定后,空间的所有向量均可由基底唯一表示;不同基底下,同一向量的表达式也有可能不同.

(2)一个基底是一个向量组,一个基向量是指基底中的某一个向量,二者是相关联的不同概念.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)空间中的任何一个向量都可以用三个给定的向量表示. ()

(2)若 $\{a, b, c\}$ 为空间的一个基底,则 a, b, c 全不是零向量. ()

(3)若向量 a, b 与任何向量都不能构成空间的一个基底,则 a 与 b 不一定共线. ()

(4)任何三个不共线的向量都可构成空间的一个基底. ()

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 基底的判断

例 1 已知 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间的一个基底,且 $\overrightarrow{OA} = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\overrightarrow{OB} = -3e_1 + e_2 + 2e_3$, $\overrightarrow{OC} = e_1 + e_2 - e_3$,试判断 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 能否构成空间的一个基底.

变式 (1)[2025·江苏海安中学期中] 已知 $SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, $SA = AB = 1$, $BC = \sqrt{5}$,则空间的一个单位正交基底可以为 ()

- A. $\{\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}\}$ B. $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}\}$
C. $\{\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}\}$ D. $\{\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}, \frac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{BC}\}$

(2)(多选题)[2025·江苏苏州中学期中] 若 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底,则下列向量不可以构成空间的一个基底的是 ()

- A. $a+b, a-b, a$ B. $a+b, a-b, b$
C. $a+b, a-b, b+c$ D. $a+b, a+b+c, c$

[素养小结]

基底的判断思路:判断给出的三个向量能否构成空间的一个基底,关键是要判断这三个向量是否共面.首先应考虑三个向量中是否有零向量,其次判断三个非零向量是否共面.如果从正面难以入手判断,可假设三个向量共面,利用向量共面的充要条件建立方程,若方程有解,则三个向量共面;否则,三个向量不共面.

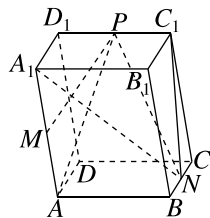
◆ 探究点二 用基底表示空间向量

例 2 [2024·江苏南京励志高中高二开学考] 如图所示,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设 $\overrightarrow{AA_1} = a$, $\overrightarrow{AB} = b$, $\overrightarrow{AD} = c$, M, N, P 分别是 AA_1, BC, C_1D_1 的中点.

(1)试用 a, b, c 表示 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{A_1N}, \overrightarrow{PN}$;

(2)试用 a, b, c 表示 $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NC_1}$;

(3)若将题干中“ P 是 C_1D_1 的中点”改为“ P 在棱 C_1D_1 上,且 $\frac{C_1P}{PD_1} = \frac{1}{2}$ ”,试用 a, b, c 表示向量 $\overrightarrow{AP}$.



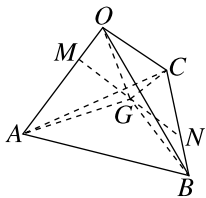
变式 (多选题)[2025·江苏南通中学期末] 如图,在四面体 $OABC$ 中, M,N 分别是棱 OA, CB 上的点,且 $AM=2MO, CN=2NB$,点 G 是线段 MN 的中点,则以下向量表示正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$



[素养小结]

用基底表示空间向量的方法

(1)若基底确定,则要充分利用向量加法的三角形法则和平行四边形法则,以及向量的数乘运算;(2)若未给定基底,则先选择基底,选择时,要尽量使所选的基向量能方便地表示其他向量,同时看基向量的模及其夹角是否已知或易求出.

◆ 探究点三 空间向量基本定理的应用

例 3 (1)在四面体 $OABC$ 中,空间的一点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}$,若 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面,则 $\lambda =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

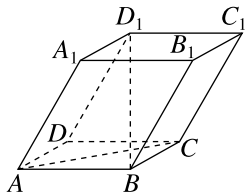
B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{7}{12}$

(2)如图所示,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形,以顶点 A 为端点的三条棱长都为 1,且两两夹角为 60° . 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$.

①以 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为基底表示向量 $\overrightarrow{BD_1}$,并求 BD_1 的长;



②求 $\cos\langle\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AC}\rangle$ 的值.

变式 (1)[2025·北京师大附中高二期末]

如图,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, M 为侧棱 PC 上的点,且 $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{MC}$,若 $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AP}$,则 $x + y + z =$ ()

A. $-\frac{5}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

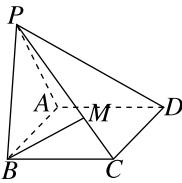
C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

(2)在正四棱锥 $P-ABCD$ 中,点 M, N, S 分别是棱 PA, PB, PC 上的点,且 $\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PN} = y\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PS} = z\overrightarrow{PC}$,其中 $x, y, z \in (0, 1]$.

①若 $x=1, y=\frac{1}{2}$,且 $PD \parallel$ 平面 MNS ,求 z 的值;

②若 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{2}$,且点 $D \in$ 平面 MNS ,求 z 的值.



[素养小结]

用空间向量基本定理解决立体几何问题的步骤:首先根据已知条件,确定三个不共面的向量构成空间的一个基底,如果存在三个两两垂直的空间向量,那么可以确定一个单位正交基底;然后根据三角形法则及平行四边形法则,结合相等向量的代换、向量的运算用确定

的基底(或已知基底)表示目标向量;最后把空间向量的运算转化为基向量的运算.涉及异面直线所成的角时,可用已知向量代入公式 $\cos \theta = \left| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \right|$ 求解,其中 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 用基向量表示.

6.2.2 空间向量的坐标表示

第1课时 空间直角坐标系及空间向量运算的坐标表示

【学习目标】

1. 在空间向量基本定理的基础上,知道空间直角坐标系的概念.
2. 结合简单几何体,能写出有关点和向量的坐标.

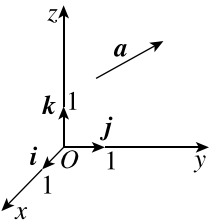
课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间直角坐标系、空间向量的坐标表示及空间中点的坐标表示

1. 空间直角坐标系

如图,在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. 以点 O 为原点,分别以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的方向为正方向建立三条数轴: _____, 它们都叫作坐标



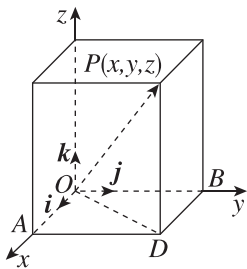
轴. 这时我们说建立了一个空间直角坐标系 $O-xyz$, 点 O 叫作坐标原点, 三条坐标轴中的每两条确定一个坐标平面, 分别称为 _____ 平面、 _____ 平面、 _____ 平面.

2. 空间向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 对于空间任意一个向量 $\mathbf{a}$, 根据空间向量基本定理, 存在唯一的有序实数组 (a_1, a_2, a_3) , 使 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. 有序实数组 (a_1, a_2, a_3) 叫作向量 $\mathbf{a}$ 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标, 记作 _____.

3. 空间中点的坐标表示

如图, 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 对于空间任意一点 P , 我们称向量 $\overrightarrow{OP}$ 为点 P 的位置向量, 把与向量 $\overrightarrow{OP}$ 对应的有序实数组 (x, y, z) 叫作点 P 的坐标, 记作 _____.



特殊点的坐标: 原点 $(0, 0, 0)$; x, y, z 轴上的点的坐标分别为 $(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z)$; 坐标平面 xOy, yOz, xOz 上的点的坐标分别为 $(x, y, 0), (0, y, z), (x, 0, z)$.

4. 在空间直角坐标系中, 点 $P(x, y, z)$ 关于坐标轴和坐标平面对称的点的坐标特点如下:

- (1) 关于坐标原点对称的点的坐标为 $(-x, -y, -z)$;
- (2) 关于横轴 (x 轴) 对称的点的坐标为 $(x, -y, -z)$;
- (3) 关于纵轴 (y 轴) 对称的点的坐标为 $(-x, y, -z)$;
- (4) 关于竖轴 (z 轴) 对称的点的坐标为 $(-x, -y, z)$;
- (5) 关于 xOy 平面对称的点的坐标为 $(x, y, -z)$;
- (6) 关于 yOz 平面对称的点的坐标为 $(-x, y, z)$;
- (7) 关于 zOx 平面对称的点的坐标为 $(x, -y, z)$.

◆ 知识点二 空间向量的坐标运算及空间向量平行的坐标表示

1. 空间向量坐标运算的法则

设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b} =$ _____, $\mathbf{a} - \mathbf{b} =$ _____, $\lambda \mathbf{a} =$ _____, $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. 空间向量平行的坐标表示

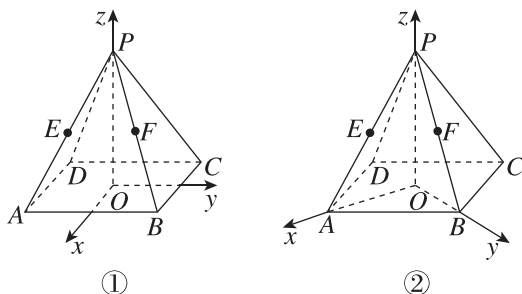
设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1 (\lambda \in \mathbf{R})$.

◆ 探究点一 求空间点的坐标

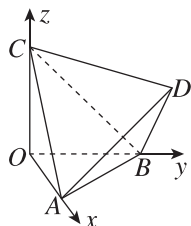
例 1 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 为底面的中心, 底面边长和正四棱锥的高都是 2, E, F 分别是侧棱 PA, PB 的中点.

(1) 如图①, 以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OP}\}$ 为正交基底, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 写出点 A, B, C, D, P, E, F 的坐标;

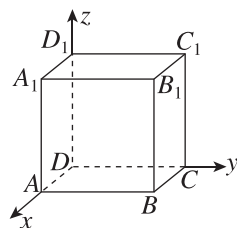
(2) 如图②, 以 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}\}$ 为正交基底, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 写出点 A, B, C, D, P, E, F 的坐标.



变式 (1) 如图, 棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体 $ABCD$ 的三个顶点 A, B, C 分别在空间直角坐标系 $O-xyz$ 的 x, y, z 轴的正半轴上, 则顶点 D 关于 z 轴对称的点的坐标为 _____.



(2) [2024 · 江苏宿迁中学期中] 已知正方体 $AB-CD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 如图所示, 以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为正交基底, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 写出各顶点的坐标.



[素养小结]

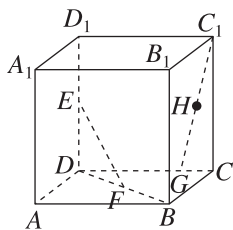
(1) 建立空间直角坐标系时应遵循的两个原则: ① 让尽可能多的点落在坐标轴上或坐标平面内; ② 充分利用几何图形的对称性.

(2) 求点 M 的坐标的方法: 作 MM' 垂直于 xOy 平面, 垂足为 M' , 求 M' 的横坐标 x , 纵坐标 y , 即点 M 的横坐标 x , 纵坐标 y , 再求点 M 在 z 轴上射影的竖坐标 z , 即为点 M 的竖坐标 z , 于是得到点 M 的坐标 (x, y, z) .

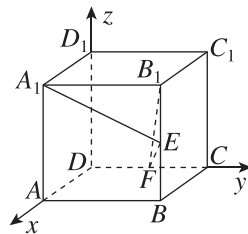
◆ 探究点二 空间向量的坐标表示

例 2 [2024 · 江苏南京一中期中] 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AA_1 = 4$, 建立适当的空间直角坐标系, 求向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BC_1}$ 的坐标.

变式 如图,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 D_1D, BD 的中点, G 在棱 CD 上,且 $CG = \frac{1}{4}CD$, H 为 C_1G 的中点.建立适当的空间直角坐标系,写出 $\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{GH}$ 的坐标.



(2) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F 分别为棱 BB_1, DC 的中点, 如图所示, 以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为正交基底, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 写出向量 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{B_1F}, \overrightarrow{A_1E}$ 的坐标.



变式 (1) 已知空间向量 $p = (1, 0, -1), q = (0, 3, 1)$, 则 $2p - 3q =$ ()

- A. $(5, 9, 1)$ B. $(-3, 6, 5)$
C. $(-2, -9, 5)$ D. $(2, -9, -5)$

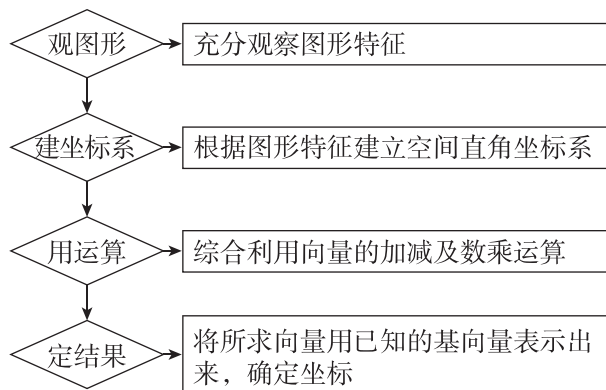
(2) [2025 · 广东清远高二期中] 已知空间向量 $a = (-2, 1, m), b = (1, -1, 0), c = (-1, 2, n)$, 若 a, b, c 共面, 则 $m + n =$ ()

- A. -1 B. 0
C. 1 D. 2

(3) 设点 $M(1, 1, 1), A(2, 1, -1), O(0, 0, 0)$. 若 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, 求点 B 的坐标.

[素养小结]

用坐标表示空间向量的步骤



◆ 探究点三 空间向量的坐标运算

例 3 (1) 已知点 $A(-1, 3, 1), B(-1, 3, 4)$, 若 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 求点 P 的坐标.

[素养小结]

(1) 向量的坐标可由其两个端点的坐标确定, 即向量的坐标等于其终点的坐标减去起点的坐标, 特别地, 当向量的起点为坐标原点时, 向量的坐标即是终点的坐标.

(2) 进行空间向量的加、减、数乘的坐标运算的关键是运用好其运算法则.

◆ 探究点四 空间向量平行的坐标表示及应用

例 4 已知空间四点 $A(-2,3,1), B(2,-5,3), C(10,0,10)$ 和 $D(8,4,9)$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是梯形.

变式 (1)[2025·湖南长沙一中高二月考] 在平行四边形 $ABCD$ 中, $A(1,-2,3), B(-4,5,6), C(0,1,2)$, 则点 D 的坐标为 ()

- A. $(5,-6,-1)$
- B. $(-5,8,5)$
- C. $(-5,6,1)$
- D. $(5,-8,-5)$

(2) 已知 $a=(-1,\lambda,-2), b=(2,-2,\mu)$, 若 $a \parallel b$, 则 $\lambda+\mu$ 的值为 _____.

[素养小结]

判断空间向量平行的步骤

- (1) 向量化: 将空间中的平行转化为向量的平行.
- (2) 向量关系代数化: 写出向量的坐标.
- (3) 对于 $a=(x_1,y_1,z_1), b=(x_2,y_2,z_2)$, 根据 $x_1=\lambda x_2, y_1=\lambda y_2, z_1=\lambda z_2 (\lambda \in \mathbf{R})$ 或 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} (x_2, y_2, z_2 \text{ 都不为 } 0)$ 是否成立判断两向量是否平行.

第 2 课时 空间向量数量积的坐标运算及空间两点间的距离公式

【学习目标】

- 1. 类比平面向量, 知道空间向量及其运算的坐标表示.
- 2. 基于运算, 能探究空间向量模的坐标公式、空间两点间的距离公式.
- 3. 类比平面向量, 知道空间向量平行、垂直、夹角的坐标表示.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间向量数量积的坐标运算

设 $a=(x_1,y_1,z_1), b=(x_2,y_2,z_2)$, 且 $a \neq 0, b \neq 0$, 则

名称	满足条件	
	向量表示形式	坐标表示形式
$a \cdot b$	$ a b \cos\langle a,b \rangle$	_____
$a \perp b$	$a \cdot b = 0$	_____
$ a $	_____	$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
$\cos\langle a,b \rangle$	$\frac{a \cdot b}{ a b }$	$\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

◆ 知识点二 空间两点间距离公式及线段的中点坐标

1. 空间两点间的距离公式

若 $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$, 则 A, B 两点间的距离为 $AB=|\overrightarrow{AB}|=_____$.

2. 空间线段中点的坐标公式

设 $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$, 则线段 AB 的中点 M 的坐标为 _____.

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 空间向量数量积的坐标运算

例 1 (1)[2025·江苏盐城五校联盟高二联考] 若 $a=(1,2,-1), b=(-1,3,2)$, 则 $(a+b) \cdot (a-2b)=$ ()

- A. 25
- B. -25
- C. -29
- D. 29

(2) 已知向量 $\boldsymbol{a} = (0, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 4, 6)$. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ 垂直, 则实数 k 的值为_____.

变式 (1) 已知 $\boldsymbol{a} = (-1, 3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, m)$, 且 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$, 则 $m =$ ()

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

(2) 若 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-2, -1, 2)$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (4, -3, -2)$, 则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$ ()

A. -5 B. -1 C. 5 D. 7

[素养小结]

关于空间向量数量积的坐标运算的两类问题

(1) 直接计算问题

首先将空间向量用坐标表示出来, 然后准确运用空间向量数量积的坐标运算公式计算.

(2) 求参数值

首先把向量坐标形式表示出来, 然后通过数量积运算建立方程(或方程组), 解方程(或方程组)求出参数.

◆ 探究点二 空间两点间的距离

例 2 (1) 在空间直角坐标系中, 点 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 7, 5)$, $C(4, 9, 7)$, 则点 A 到 BC 的中点 D 的距离为 ()

A. $2\sqrt{13}$ B. $\sqrt{11}$ C. 7 D. 6

(2) [2025 · 北京丰台区高二期中] 在棱长为 4 的正方体内有一点 P , 它到该正方体共顶点的三个面的距离分别为 2, 1, 1, 记正方体的中心为点 O , 则 $OP =$ ()

A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{6}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$

变式 已知 $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 4)$, 求:

(1) 线段 AB 的中点坐标和线段 AB 的长度;

(2) 到 A, B 两点距离相等的点 $P(x, y, z)$ 的坐标满足的条件.

[素养小结]

利用空间两点间的距离公式求空间两点间距离的步骤:

(1) 建立适当的坐标系, 并写出相关点的坐标;

(2) 代入空间两点间的距离公式求值.

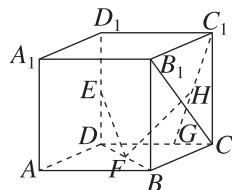
◆ 探究点三 利用数量积公式求夹角及模

例 3 如图, 在棱长为 2 的正方体中, E, F 分别是 DD_1, DB 的中点, G 在棱 CD 上, 且 $CG = \frac{1}{3}CD$, H 是 C_1G 的中点. 建立适当的空间直角坐标系, 解决下列问题.

(1) 求证: $EF \perp B_1C$;

(2) 求 $\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{C_1G} \rangle$;

(3) 求 HF 的长.



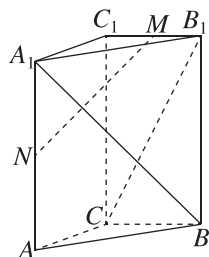
变式 (1) [2025 · 江苏海门中学期中] 已知向量

$\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (m, 0, 2)$, $\cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, 若

向量 $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角, 则实数 k 的取值范围是_____.

(2) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA = CB = 1$, $\angle BCA = 90^\circ$, $AA_1 = 2$, M, N 分别是 B_1C_1, A_1A 的中点.

- ①求 M, N 之间的距离;
②求 $\cos\langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1} \rangle$ 的值.



[素养小结]

利用空间向量的坐标运算求夹角与模的一般步骤

(1) 建系: 根据题目中的几何图形建立恰当的空间直角坐标系.

(2) 求坐标: ①求出相关点的坐标; ②写出向量的坐标.

(3) 论证、计算: 结合公式进行论证、计算.

(4) 转化: 转化为夹角与距离问题.

拓展 [2024·杭州二中高二期中] 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是底面 $ABCD$ (含边界) 上一动点, 满足 $A_1P \perp AC_1$, 则线段 A_1P 长度的取值范围是 ()

- A. $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}]$
B. $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{3}]$
C. $[1, \sqrt{2}]$
D. $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

6.3 空间向量的应用

6.3.1 直线的方向向量与平面的法向量

【学习目标】

1. 联系空间向量与立体几何, 知道直线的方向向量和平面的法向量.
2. 结合空间几何体, 能求出有关直线的方向向量和平面的法向量.
3. 在空间点的向量表示的基础上, 能借助直线的方向向量和平面的法向量来刻画直线和平面.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 直线的方向向量

把直线 l 上的向量 $e (e \neq 0)$ 以及 _____ 的非零向量叫作直线 l 的方向向量.

注意: (1) 空间中, 一个向量成为直线 l 的方向向量, 必须具备以下两个条件: ①是非零向量; ②向量所在的直线与 l 平行或重合.

(2) 与直线 l 平行的任意非零向量 a 都是直线 l 的方向向量, 且直线 l 的方向向量有无数个.

◆ 知识点二 平面的法向量

1. 定义: 如果表示非零向量 n 的有向线段所在直线垂直于平面 α , 那么称向量 n 垂直于平面 α , 记作 _____. 此时, 我们把向量 n 叫作平面 α 的法向量.

注意: 一个平面的法向量不是唯一的, 在应用时, 可适当取平面的一个法向量. 已知一平面内两条相交直线的方向向量, 可求出该平面的一个法向量.

2. 求平面法向量的方法

(1) 几何体中有具体的直线与平面垂直, 只需证明线面垂直, 取该垂线的一个方向向量即得平面的法向量.

(2) 几何体中没有具体的直线与平面垂直, 一般要建立空间直角坐标系, 然后用待定系数法求解, 一般步骤如下:

(i) 设出平面的法向量为 $n = (x, y, z)$;

(ii) 找出 (求出) 平面内的两个不共线的向量的坐标 $a = (a_1, b_1, c_1)$, $b = (a_2, b_2, c_2)$;